

E1.2 Определите размерность нормировочной константы N , соответствующих параметров и волновой функции $\psi(\xi)$. Нормировочные константы определите из:

- (a) $\psi(x) = N \cdot x(a-x)$ (b) $\psi(x) = N \cdot x^2 e^{-\alpha x^2}$
 (c) $\psi(r) = N \cdot e^{-\beta r}$ (d) $\psi(r) = N \cdot (1 - r^2 / r_0^2) e^{-\gamma r^2}$.

E2.10 Определите, являются ли коммутаторы $[\hat{x}, \hat{p}_x]$, $[\hat{x}^2, \hat{p}_x]$ и $[\hat{x}, \hat{p}_x^2]$ эрмитовыми.

E2.13 Операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ не коммутируют, $\hat{A}$ и $\hat{B}$ – эрмитовы. Выберите среди следующих коммутаторов эрмитовы:

- (a) $[\hat{A} + \hat{B}, i\hat{B}]$
 (b) $[\hat{A} + \hat{B}, \hat{B} - \hat{A}]$
 (c) $i[\hat{A} + \hat{B}, \hat{B}]$
 (d) $i[\hat{A}, \hat{B}]$
 (f) $[\hat{A}, i\hat{B}^2]$

P2.1 Докажите, что коммутатор двух эрмитовых операторов «анти-эрмитов».

P2.3 Используя разложение Тейлора в ряд для экспоненты $e^{\alpha \hat{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \hat{A}^n = \hat{I} + \alpha \hat{A} + \frac{\alpha^2}{2!} \hat{A}^2 + \frac{\alpha^3}{3!} \hat{A}^3 + \dots$, докажите два следующих соотношения:

- (a) $e^{\hat{A}} \cdot e^{\hat{B}} = e^{\hat{A} + \hat{B}} e^{[\hat{A}, \hat{B}]/2}$
 (b) $e^{\hat{A}} \hat{B} e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \frac{1}{3!} [\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]] + \dots$

Найдите пятый член ряда.

P2.4 Есть некоторый оператор $\hat{A}$. Известно, что коммутатор $[\hat{A}, \hat{A}^\dagger] = 1$.

(a) Найдите коммутаторы $[\hat{A}^\dagger \cdot \hat{A}, \hat{A}]$ и $[\hat{A}^\dagger \cdot \hat{A}, \hat{A}^\dagger]$.

(b) Пусть $\hat{A}$ и $\hat{A}^\dagger$ удовлетворяют следующим выражениям: $\hat{A}\varphi_a = \sqrt{a}\varphi_{a-1}$ и $\hat{A}^\dagger\varphi_a = \sqrt{a+1}\varphi_{a+1}$. Функции φ_a удовлетворяют условию $\int \varphi_a^* \varphi_a d\xi = \delta_{a'a}$

Рассчитайте:

$$\int \varphi_a^* \hat{A} \varphi_{a+1} d\xi, \int \varphi_{a+1}^* \hat{A}^\dagger \varphi_a d\xi, \int \varphi_a^* \hat{A}^\dagger \hat{A} \varphi_a d\xi \text{ и } \int \varphi_a^* \hat{A} \hat{A}^\dagger \varphi_a d\xi.$$

(c) Рассчитайте: $\int \varphi_a^* (\hat{A} + \hat{A}^\dagger)^2 \varphi_a d\xi$ и $\int \varphi_a^* (\hat{A} - \hat{A}^\dagger)^2 \varphi_a d\xi$.

P2.9 Дано три матрицы:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \hat{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Найдите коммутаторы $[\hat{A}, \hat{B}]$, $[\hat{B}, \hat{C}]$ и $[\hat{A}, \hat{C}]$.

(b) Покажите, что $\hat{A}^2 + \hat{B}^2 + \hat{C}^2 = 4\hat{I}$, где $\hat{I}$ – единичная матрица.

(c) Вычислите коммутатор $[[\hat{A}, \hat{B}], [\hat{B}, \hat{C}]]$.

P2.10 Даны волновые функции

$$\varphi_1(x, y) = 2\sin(2x) \cdot \cos(4y), \varphi_2(x, y) = 2[\sin(2x) + \cos(4x)], \varphi_3(x, y) = 2\sin^2(x + y)$$

(a) Определите, являются ли данные функции собственными функциями оператора $\hat{A} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$.

(b) Определите, являются ли данные функции собственными функциями оператора $\hat{B} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 1$.

(c) Найдите результат действия $\hat{A}\hat{B}$ и $\hat{B}\hat{A}$ на каждую из функций, а также определите $[\hat{A}, \hat{B}]$.

P2.11 Даны волновые функции

$$\varphi_1(x, y) = e^{-4(x^2+y^2)}, \quad \varphi_2(x, y) = e^{-4(x+y)^2}, \quad \varphi_3(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-4(x^2+y^2)}$$

(a) Определите, являются ли данные функции собственными функциями оператора $\hat{A} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$.

(b) Определите, являются ли данные функции собственными функциями оператора $\hat{B} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 1$.

(c) Найдите результат действия $\hat{A}\hat{B}$ и $\hat{B}\hat{A}$ на каждую из функций, а также определите $[\hat{A}, \hat{B}]$.

P2.12 Даны волновые функции

$$\varphi_1(x, y) = e^{-4i(x^2+y^2)}, \quad \varphi_2(x, y) = e^{-i(x+y)}, \quad \varphi_3(x, y) = e^{-ix+y}$$

(a) Определите, являются ли данные функции собственными функциями оператора $\hat{A} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$.

(b) Определите, являются ли данные функции собственными функциями оператора $\hat{B} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 1$.

(c) Найдите результат действия $\hat{A}\hat{B}$ и $\hat{B}\hat{A}$ на каждую из функций, а также определите $[\hat{A}, \hat{B}]$.

P2.15 Докажите, что функция ψ является собственной функцией оператора $\hat{A}$ только в том случае, если $\overline{A^2} = (\bar{A})^2$.

P2.16 Вычислите следующие интегралы, включающие в себя дельта-функцию Дирака:

$$(a) \int_{-2}^2 e^{3x+x^2} \delta(5x) dx$$

$$(b) \int_0^5 (2x^5 - 4x^3 + 1) \delta(x+2) dx$$

$$(c) \int_{-5}^5 (2x^5 - 4x^3 + 1) \delta(x+2) dx$$

$$(d) \int_0^{\pi} \sin(3x) \cos^2(x) \delta(x - \pi/2) dx$$

E3.1 Определите собственные значения оператора $\hat{F}$ для соответствующих собственных функций $\Psi(x)$:

$$(a) \hat{F} = -\frac{d^2}{dx^2}, \quad \Psi(x) = \sin 2x;$$

$$(b) \hat{F} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2, \quad \Psi(x) = \exp(-x^2/2);$$

$$(c) \hat{F} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{d}{dx}, \quad \Psi(x) = \frac{\sin \alpha x}{x};$$

E3.3 Докажите, что данное выражение справедливо для одномерного случая:

$$\bar{p}_x = \frac{i\hbar}{2} \int \left(\Psi \frac{d\Psi^*}{dx} - \Psi^* \frac{d\Psi}{dx} \right) dx$$

E3.6 Докажите, что в любом случае средние значения эрмитовых операторов $\hat{L}^+ \hat{L}$ и $\hat{L} \hat{L}^+$ **не** являются отрицательными. Здесь $\hat{L}$ – произвольный линейный оператор.